ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν η προηγούμενη $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη τότε η παράγωγος της, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$, όπου

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$, ονομάζεται εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\gamma(t) \in \gamma(\mathbb{R})$

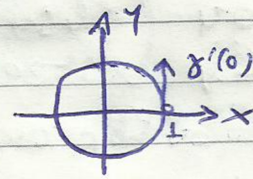
το $\gamma'(t)$ εκφράζει την (απειροστική μεταβολή δηλ για $h \to 0$ της) ταχύτητα του σημείου $\gamma(t)$ τη χρονική στιγμή t (και πολλές φορές ονομάζουμε $\|\gamma'(t)\|$ ταχύτητα του $\gamma(t)$ στο t)

πχ

για $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

είναι $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

και $\gamma'(0) = (0, 1)$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ με $\gamma'(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in I$ ονομάζεται <u>κανονική</u> και το διάνυσμα $\dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ ονομάζεται <u>μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα</u>

Παρατήρηση 2η

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ και $(x(t), y(t)) \subset U$, $t \in I = (\alpha, \beta)$ μια διαφορίσιμη καμπύλη στο U, και f διαφορίσιμη στο σημείο $(x(t_0), y(t_0))$, $t_0 \in I$ τότε

η $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ είναι μια καμπύλη στο γράφημα της f

και είναι διαφορίσιμη στο σημείο

$(x(t_0), y(t_0), f(x(t_0), y(t_0))) \in \Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in U\}$

και η παράγωγος της είναι

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ \dfrac{d}{dt} f(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix} \overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ \nabla f(x(t_0), y(t_0))(x'(t_0), y'(t_0)) \end{pmatrix}$$

Η εφαπτόμενη της καμπύλης $\gamma(t)$ στο $\gamma(t_0)$

δηλαδή η ευθεία

$\gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι υποσύνολο του

αφού

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ f(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ \nabla f(x(t_0),y(t_0)) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ f(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix} + \lambda x'(t_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix} + \lambda y'(t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix}$$

είναι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ f(x(t_0),y(t_0)) \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ειδικότερα, αν $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t - t_0) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ με $\|v\| = 1$

Επί έχουμε $\nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) =$

$$= \nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (v_1, v_2) =$$
$$= \nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot v =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial v}(x(t_0), y(t_0))$$

βλέπουμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ είναι και αυτή στο εφαπτόμενο επίπεδο.

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 + y^2$ και $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(x(t_0), y(t_0), f(x(t_0), y(t_0)))$, τα εφαπτόμενα διανύσματα των $(x(t), y(t)) \subset \mathbb{R}^2$ και $(x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \subset \mathbb{R}^3$ καθώς νδο η εφαπτόμενη ευθεία της $\gamma(t)$ βρίσκεται στο εφαπτ. επίπεδο